Механикадағы ұқсастық әдістері және өлшем бірліктер 7M05405-Механика және энергетика Дәріс 10 Қысқа конспект10

**10-дәріс. Гидродинамикалық процестердің ұқсастығы**

Ұқсастық әдісі көптеген физикалық және техникалық мәселелерді зерттеуде, атап айтқанда, зертханалық жағдайда нақты, "табиғи" процестерді модельдеуде қолданылады. Зертханалық модельдеу нәтижелерін нақты объектілерді жобалау үшін пайдалануға болады.

Екі физикалық құбылысты ұқсас деп айтады, егер бір құбылысты сипаттайтын шамаларды, басқа сәйкес шамалардан алынған, ұқсас кеңістік-уақыт нүктелерін бірдей көбейткішке қарапайым көбейту арқылы ұқсастық коэффициенттерін алуды айтады. Басқаша айтқанда, екі ұқсас кеңістік-уақыт нүктелеріндегі облыстардағы олардың өтуі, құбылыстарды сипаттайтын шамалардың масштабтарымен ғана ерекшеленеді.

Бұдан шығатыны, егер дифференциалдық теңдеулердегі, шекаралық және бастапқы шарттардан өлшемді шамаларды олардың масштабына қатысты қарапайым өлшемді шамаларынан, өлшемсіз шамаларға көшсек, бұдан өлшемсіз шамалардың дифференциалдық теңдеулері мен оларға сәйкес өлшемсіз бастапқы және шекаралық шарттар екі құбылыс (жағдай) үшін де бірдей болып шығады.

Тығыздығы мен тұтқырлығы әр түрлі болатын екі бар тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтардың екі изотермиялық ламинарлық ағындарының ұқсастық шарттарын қарастырайық. Өлшемсіз дифференциалдық теңдеулер мен оларға сәйкес келетін шекаралық және бастапқы шарттарды салыстыру әдісін ескере отырып, тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысы үшін Навье-Стокс теңдеулерін өлшемсіз түрге келтірейік. Атап айтқанда, өлшемсіз айнымалыларды еңгізейік

$t^{'}=\frac{t}{t\_{0}}, x^{'}=\frac{x}{L}, ∇^{'}=∇∙L, \overbar{v}^{'}=\frac{\overbar{v}}{v\_{0}}, p^{'}=\frac{p}{p\_{0}}, \overbar{F}^{'}=\frac{\overbar{F}}{F\_{0}}$

мұндағы $t\_{0}$, $L$, $v\_{0}$, $p\_{0}$ және $F\_{0}$– сәйкесінше уақыт, ұзындық (атап айтқанда координаттар), жылдамдық, қысым және көлемдік күштер масштабтары.

Навье-Стокс теңдеуі осы өлшемсіз айнымалылардағы түрі мынадай түрге келтіріледі (штрих-индекс ескерілмеген) 1

$Sh\frac{∂\overbar{v}}{∂t}+\left(\overbar{v}∙∇\right)\overbar{v}=\frac{1}{Fr}\overbar{F}-Eu∇p+\frac{1}{Re}∇^{2}\overbar{v}, ∇∙\overbar{v}=0, $ (1.80)

Мұндағы $Sh=\frac{L}{v\_{0}t\_{0}}$– Струхал саны, $Fr=\frac{v\_{0}^{2}}{F\_{0}L}$– Фруд саны, $Eu=\frac{P\_{0}}{ρv\_{0}^{2}}$– Эйлер саны, $Re=\frac{v\_{0}L}{ν}$– Рейнольдс саны.

Екі стационарлық емес тұтқыр сығылмайтын сұйықтық ағындарының өзара ұқсайды делік. Бұл жағдайда Навье-Стокс теңдеулері мен оларға сәйкес өлшемсіз шекаралық және бастапқы шарттар өзара салыстырылатын қозғалыстар үшін бірдей болуы керек. Құбылыстардың ұқсастық шарттарынан дифференциалдық теңдеулер сәйкес келуі үшін ұқсастық сандарының бірдей болуын қадағалау керек, яғни *Sh, Fr, Eu* және *Re*.

Гидродинамикалық процесс есебінің тұжырымы қамтитын тек салыстырылатын ағындар мен ортаның физикалық тұрақтыларынан ғана құралған масштабтардың ұқсастық саны ұқсастық критерийлері деп аталады. Ұқсастық критерийлері сәйкес класс ағыны үшін ұқсастық сандарына қарағанда аз болып келеді,

$ Sh\_{1}=Sh\_{2}, Fr\_{1}=Fr\_{2}, Eu\_{1}=Eu\_{2}, Re\_{1}=Re\_{2}.$ (1.82)

 Бастапқы және шекаралақ шарттардың өлшемсіз теңдеулерін құрғанда масштабты шамалардың барлығы алдын-ала берілмейтіндіктен, жоғарыда айтылған ережелерді келесі мысалдар ретінде көрсетейік.

***Мысал 1.*** Диаметрі d цилиндрінің оған түсетін тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың оған біртекті ағынның кинематикалық тұтқырлық коэффициенті ν, тығыздығы ρ және тұрақты жылдамдығы $v\_{0}$, қозғалыс тұрақты, көлемдік күштер берілмеген жағдайда, әсер ету кедергісін анықтайық. Сонда ұқсастықтың қажетті шарттарының арасында (1.82) екеуі қалады:

$Eu\_{1}=Eu\_{2 , }Re\_{1}=Re\_{2} $.

Рейнольдс саны$ (Re=\frac{v\_{0}L}{ν}$) бұл жерде ұқсастық критерийі болып тұр, өйткені оның алдын - ала масштабтары берілген: жылдамдық – $v\_{0}, $ұзындық-*d* және берілген физикалық тұрақты $ν$. Берілген есеп R кедергі күшін цилиндрді сұйық ағынмен ағып өткеннен соң ғана анықтауға болады, өйткені ол цилиндр бетіне әсер ететін ағынның қысым күші мен сұйықтықтың үйкеліс күші арқылы анықталады. Эйлер санындағы белгісіз қысым масштабы ұқсастық критерийі бола алмайды, ол Рейнольдс саны -- функциясының критерийі болады.

Кедергі коэффициенті $С\_{R}$ цилиндр ұзындығының бірлігі

$$С\_{R}=\frac{R}{(1/2)ρv\_{0}^{2}σ}$$

цилиндрдің ортаңғы бөлігінің қима ауданы, Эйлер санының рөлін атқарады (сондықтан ${R}/{σ}$) қысымның өзгеру өлшемдігіне ие және Рейнольдс санына тәуелді, яғни $С\_{R}\left(Re\right)$.

***Мысал 2****.* Қозғалыс стационарлы болмаған жағдайда, цилиндрді сығылмайтын тұтқыр сұйықтық ағынымен айналдыру есебін қарастырайық. Ұқсастық әдісі тұрғысынан көлемдік күштер етпейтінін ескеріп, бұл жағдайда ұқсастықтың үш санын аламыз: *Sh, Eu* ( немесе $С\_{R}$) және Re. Олардың ішінде тек Re саны ғана берілген шамалардан тұрады $V\_{0}$, d және ν және цилиндрдің сұйықтық ағынымен тұрақты емес, ағып өтуінің ұқсастық критерийін білдіреді. $С\_{R}$ және Sh сандары алдын - ала белгісіз, мысалы, тербеліс жиілігі $N=1\T\_{0}$ ($T\_{0}$-тербеліс кезеңі) және R кедергісі және Re ұқсастық критерийінің функциялары болып табылады.

Сұйықтықтың біртекті ағыны тұрақты N жиілікпен берілген тербелмелі режимге келтірілген жағдайда, Sh Струхал саны ұқсастық критерийімен, Рейнольдс Re санымен, бір қатарға келгенде, $С\_{R} $кедергі коэффициенті Re және Sh екі ұқсастық критерийлерінің функциясына айналады, яғни

$С\_{R}$ = f (Sh, Re).

***Мысал 3.*** Дөңгелек цилиндр пішіндес құбырдағы тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың стационар қозғалысын қарастырайық.

Сұйықтықтың тығыздығы $ρ$ және $μ$ динамикалық тұтқырлық коэффициенті$,$ дөңгелек құбырдан $d$ диаметрі мен $l$ бөлігінен тұрақты $∆p$ қысым өзгерісінің әсерінен ағады, сондай-ақ сұйықтықтың секунд бойынша тұрақты екінші көлемдік шығыны $Q$ тең. Ұқсастық әдісі құбырдағы $∆p$ қысым өзгерісі мен құбыр арқылы өтетін сұйықтықтың секундтық екінші $Q$ көлемдік шығыны арасындағы тәуелділіктің жалпы ағыс туралы нұсқаулықтарды көрсете алады.

Құбырдағы орта көлденең (горизонталь) қозғалғанда көлемдік күштердің, нақтырақ айтқанда, ауырлық күшінің әсерін ескермеуге болады. Сонда ұқсастық сандарыны арасында (1.82) қалатыны

$Eu= {p\_{0}}/{ρv\_{0}^{2}}$ и $Re={v\_{0}d}/{ν}$.

$Р\_{0}$ қысым масштабы ретінде осы құбырға тән қысымының өзгерісін берілген құбыр ұзындығын оның $d$ диаметрін алайық, демек

$Р\_{0}=\frac{∆p}{l}d$*.*

Жылдамдықтар масштабы үшін қима бойынша $V\_{cp}$ ағынының орташа жылдамдық формуласы арқылы анықтайық

$V\_{cp}=\frac{Q}{\frac{1}{4}πd^{2}}$.

Осындай масштабты таңдау кезінде ұқсастық күші келесідей болады

$Eu=\frac{∆p}{ρV\_{cp}^{2}}$, $Re=\frac{V\_{cp}∙d}{ν}$.

Бұл есептің екі қойылымы мынадай болуы мүмкін.

3.1 $Q$ шығыны берілген, оны алу үшін қажетті $∆p$ қысым өзгерісін құбырдың берілген $l$ бөлігіндегі ұзындығын есептеу керек

Бұл жағдайда ұқсастық критерийі Рейнольдс саны болады, ал Эйлер саны оның функциясы болып табылады. Құбырдың кедергі коэффициенті $λ$, кедергі формуласына сәйкес $\left(Eu={λ}/{2}\right)$

$$∆p=λ\frac{l}{d}\frac{ρV\_{cp}^{2}}{2}$$

Рейнольдс санының функциясы болады

$λ=f(Re)$*.*

3.2 Ұзындығы $l$ құбыр учаскесінде $∆p $ қысым өзгерісі берілген, құбыр арқылы өтетін сұйықтықтың екінші $Q$ көлемдік шығынын анықтау керек.

Бұл жағдайда $Eu$ және $Re$ ұқсастық сандарының арасында бірде-бір критерий жоқ, себебі екі шаманың да құрамында алдын-ала белгісіз $V\_{cp}$шамалар.

$Eu$ санынан $V\_{cp}^{2}$ шамасын қысқарту үшін өлшемсіз кешен құрамыз

$$Eu∙Re^{2}=ρ\frac{∆pd^{3}}{μ^{2}l}=ρ\frac{d^{2}∆p}{μ^{2}}\frac{d}{l} ,$$

ұқсастық есебінің осы тұжырымында ұқсастық критерийінің рөлін –$Re^{\*}$саны атқарады, ал Рейнольдс саны $Re=\frac{V\_{cp}∙d}{ν}$ тек ұқсастық саны болып қалады. Бұл жағдайда алатынымыз

$Re=\frac{V\_{cp}∙d}{ν}=\frac{4Q}{πνd}=f\_{1}\left(\frac{ρd^{2}∆p}{μ^{2}}\frac{d}{l}\right)$*,*

мұндағы $f\_{1}$-жаңа функционалды тәуелділіктің символы. Егер салыстырылатын екі жүйеде де ұқсас бөліктегі $l=d$ немесе $d$ рет $∆p$ мәнін қысымның өзгерісі деп ұйғарса, онда алдыңғы формуланы келесі түрде жазуға болады:

$Q=\frac{πνd}{4}f\_{1}\left[\frac{∆p}{ρ}\left(\frac{d}{ν}\right)^{2}\right]$.